

## Gleichungen und Ungleichungen

### Äquivalenzumformungen

**Ziel:** Erreichen einer einfachen Gleichung der Form:  $x = c$

1. Äquivalenzumformung durch Addition/Subtraktion von Termen  
„Strichäquivalenzumformungen“

**Merke:** Addiert oder subtrahiert man zum Links- und Rechtsterm einer Gleichung/Ungleichung denselben Term(-wert), so ändert sich die Lösungsmenge nicht!

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 \\ \Leftrightarrow T_1 \pm T &= T_2 \pm T \end{aligned}$$

2. Äquivalenzumformungen durch Multiplikation/Division von Termen  
„Punktäquivalenzumformungen“

**Merke:** Multipliziert oder dividiert man den ganzen (!) Links- oder Rechtsterm einer Gleichung/Ungleichung mit demselben Term (-wert) (ungleich Null), so ändert sich die Lösungsmenge nicht.

**Ausnahme:** Inversionsgesetz bei Ungleichungen!

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 \\ \Leftrightarrow T_1 \cdot T &= T_2 \cdot T \\ \Leftrightarrow T_1 : T &= T_2 : T \quad \text{mit } T \neq 0 ! \end{aligned}$$

### Empfohlenes Vorgehen zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen:

1. Weitgehendstes Vereinfachen von Links- und Rechtsterm durch Termumformungen.  
Ziel:  $ax + b = cx + d$
2. Variable auf eine Seite („Strichäquivalenzumformungen“)  
„Rest“ auf die andere Seite („Strichäquivalenzumformungen“)  
Ziel:  $kx = m$
3. Letzte Äquivalenzumformung („Punktäquivalenzumformung“):  
Multiplikation mit dem inversen Element:  $\frac{1}{k}$  (statt Division!)  
Ziel:  $x = \frac{m}{k}$
4. Lösungsmenge

**Merke:** Möglichst „Strich-“, vor „Punktäquivalenzumformung“ !

Beispiel: Gleichung ( G = Q )

$$\begin{aligned} 2x + 5 - x &= 1 - x - 8 \\ \Leftrightarrow x + 5 &= -x - 7 && \text{(1. Ziel erreicht!)} \\ \Leftrightarrow x + 5 + x &= -x + x - 7 \\ \Leftrightarrow 2x + 5 &= -7 \\ \Leftrightarrow 2x + 5 - 5 &= -7 - 5 \\ \Leftrightarrow 2x &= -12 && \text{(2. Ziel erreicht!)} \\ \Leftrightarrow 2x \times \frac{1}{2} &= -12 \times \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= -6 ; && \text{(3. Ziel erreicht!)} \\ & \mathbf{L = \{-6\}} \end{aligned}$$

Beispiel: Ungleichung ( G = Q )

$$\begin{aligned} 2x - 5 + x &> 7x - 7 + 10 \\ \Leftrightarrow 3x - 5 &> 7x + 3 \\ \Leftrightarrow 3x - 7x - 5 &> 7x - 7x + 3 \\ \Leftrightarrow -4x - 5 &> 3 \\ \Leftrightarrow -4x + 5 - 5 &> 3 + 5 \\ \Leftrightarrow -4x &> 8 \\ \Leftrightarrow x \times \left(-\frac{1}{4}\right) &< -8 \times \left(-\frac{1}{4}\right) && \text{Inversionsgesetz!} \\ \Leftrightarrow x &< -2 ; \quad \mathbf{L = \{ x \mid x < -2 \}} \end{aligned}$$

**Interaktive Übungen zum Thema „Gleichungen“:**

<http://www.arndt-bruenner.de/mathe/java/gleichungenloesen.htm>

(Es könne auch Übungsaufgaben erzeugt werden!)